

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

1^{ère} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Attention !

L'exercice n° 1 de la présente épreuve est obligatoire et toute note strictement inférieure à 6 à cet exercice est éliminatoire (chaque question de l'exercice n° 1 étant notée sur 1 point).

Globalement cet exercice n'entre toutefois que pour un cinquième dans la note finale de cette première épreuve de mathématiques.

Exercice n° 1

1. Calculer, en $x = 1$, la dérivée de : $x^2 \operatorname{Ln}(x + e^x)$

2. Calculer $I = \int_0^{\pi/2} (x+1) \sin x \, dx$

3. Résoudre l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

4. Trouver la primitive de $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ qui s'annule en $x=1$.

5. Résoudre l'inéquation : $6x^2 - x - 1 < 0$

6. On considère 5 entreprises dont les dépenses mensuelles en eau au cours des deux derniers mois sont présentées dans le tableau suivant :

3	4
1	1
2	5
1	3
2	1

Calculer le barycentre de ces données.

7. Dans le secteur du commerce de gros, la moyenne du chiffre d'affaires des petites entreprises est de 100, la moyenne du chiffre d'affaires des moyennes entreprises est de 300 et celle des grandes de 800. Sachant que les petites entreprises représentent la moitié du total des entreprises et que les grandes entreprises ne représentent que 10% du total, quelle est la moyenne du chiffre d'affaires pour l'ensemble des entreprises ?

8. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

9. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels, l'équation : $x^n = 1$ pour $n = 3$ et 4 .

10. Déterminer la limite de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n}{4}$ et $U_1 = 1$

Exercice n° 2

Pour tout nombre réel t , on considère la fonction numérique F_t définie par :

$$F_t(x) = \frac{e^{(1+t)x} - 1}{e^x - 1}$$

1. Montrer que F_t se prolonge par continuité en 0, et que le fonction prolongée, notée encore F_t , est dérivable en 0. Que valent $F_t(0)$ et $F_t'(0)$?
2. On suppose que F_t admet un développement limité en 0 à tout ordre p , et l'on pose

$$F_t(x) = 1 + \varphi_0(t) + \frac{\varphi_1(t)}{1!}x + \frac{\varphi_2(t)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\varphi_p(t)}{p!}x^p + x^p \varepsilon(t)$$

Donner les valeurs de φ_0 et φ_1 .

Exercice n° 3

On considère la fonction numérique f_a définie par :

$$f_a(x) = -ax + \ln(x), \text{ pour } x > 0$$

où \ln désigne le logarithme népérien et a est un réel strictement positif.

1. Déterminer, selon les valeurs de a , le nombre de racines de l'équation $f_a(x) = 0$.
2. Donner l'allure du graphe de $f_{1/2}$.
3. Calculer l'aire comprise entre le graphe de $f_{1/2}$, l'axe des abscisses, les droites $x=1$ et $x=2$.
4. Montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, et tout $x, t > 0$, on a :
$$f_a(\alpha x + (1-\alpha)t) \geq \alpha f_a(x) + (1-\alpha)f_a(t)$$
5. Etudier, selon les valeurs de a , la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = au_n$.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n , on pose :
$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n - 1}{t + 1} dt$$

1. Calculer $I_1(x)$ et $I_2(x)$
2. Calculer $I_3(x)$
3. Etudier les variations de $I_1(x)$ et tracer son graphe.
4. Calculer $J_1 = \int_0^1 I_1(x) dx$

Exercice n° 5

Soit $M(x, y)$ un point du plan où $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

On pose $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

On tire aléatoirement un point $M(x, y)$. Quelle est la probabilité que le point M appartienne au domaine D ?

Exercice n° 6

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt$$

1. Calculer $I(0), I(1), I(2)$
2. En effectuant une intégration par parties, établir une relation entre $I(n)$ et $I(n-2)$
3. Etudier la monotonie de la suite $I(n)$
4. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I(n+1)}{I(n)}$
5. Soit $u(n) = (n+1)I(n+1)I(n)$. Calculer $u(0), u(1)$.
6. Démontrer que, pour tout n , $u(n)$ est égale à une constante que l'on précisera.
7. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} nI^2(n)$
8. A l'aide de la relation établie à la question 2, exprimer $I(2p)$ et $I(2p+1)$ en fonction C_{2p}^p et de p (C_{2p}^p désigne l'ensemble des combinaisons de p éléments pris parmi $2p$).

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

ORDRE GÉNÉRAL

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats traiteront au choix l'un des trois sujets suivants.

Sujet n° 1

Peut-on toujours faire confiance à la science et aux scientifiques ?

Sujet n° 2

En quoi les énergies alternatives peuvent-elles être bénéfiques pour le continent africain ?

Sujet n° 3

Comment gérer l'émergence des grandes villes africaines ? Faut-il y voir une nouvelle preuve du dynamisme de l'Afrique ou au contraire le signe de l'accélération de l'exode rural ?

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

2^{ème} COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Exercice n° 1

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle définie par : $f(x) = xe^x + 1$

1. Etudier les variations de f .
2. La fonction f admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ce point d'inflexion.
3. Tracer le graphe de f .
4. Calculer : $I = \int_{-1}^0 f(x) dx$

Exercice n° 2

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$

1. Calculer I_1 et I_2 .
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} .
3. Calculer I_3 et I_4 .

Exercice n° 3

On considère la suite numérique (u_n) définie, pour n entier naturel, par : $u_n = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Soit $v_n = \prod_{k=1}^n u_k$, déterminer, si elle existe, la limite de la suite (v_n) .
3. Soit $w_n = Ln(u_n)$.
 - Montrer que la suite (w_n) converge.
 - Déterminer la limite de (w_n) .
4. Soit $t_n = \sum_{k=1}^n w_k$. Montrer que la suite (t_n) converge.

Exercice n° 4

Pour tout entier naturel strictement positif n , on pose : $I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x dx$

1. Calculer I_n
2. Montrer que (I_n) est une suite géométrique et calculer sa limite.

Exercice n° 5

Dans un terrain rectangulaire de largeur 10 mètres et de longueur 100 mètres, se trouve un étang dont on ne connaît pas la superficie. Pour estimer cette surface, on lance aléatoirement 500 flèches dans le terrain et on constate que 100 flèches sont tombées dans l'étang.

1. Donner une estimation de la surface de l'étang.
2. Comment peut-on améliorer cette estimation ?

Exercice n° 6

1. Résoudre le système :
$$\begin{cases} x - 3y = 2\text{Ln}2 \\ x + y = 4\text{Ln}2 \end{cases}$$

2. On pose : $I = \int_0^{\text{Ln}16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$ et $J = \int_0^{\text{Ln}16} \frac{1}{e^x + 4} dx$.

Calculer I et J .

Exercice n° 7

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels non nuls par :

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note encore f cette fonction prolongée.
2. Etudier la dérivabilité de f sur \mathbb{R} , ainsi que la continuité de sa fonction dérivée.
3. Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation : $f(x) = 0$.

AVRIL 2012

CONCOURS INGÉNIEURS DES TRAVAUX STATISTIQUES

ITS Voie A

CONTRACTION DE TEXTE

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Ce texte est extrait du livre « Eloge de l'optimisme » Quand les enthousiastes font bouger le monde de Philippe GABILLET publié en janvier 2011 aux éditions Saint Simon.

Il doit être résumé en 250 mots plus ou moins 10%.

Il sera tenu compte de l'orthographe, de la ponctuation et de la présentation de votre copie.

En ces temps troublés, à l'heure où les conflits, les catastrophes naturelles et humanitaires, les récessions économiques et sociales ne cessent de rappeler à notre bon souvenir les misères du monde, comment ne pas percevoir un parfum d'insolence et de scandale, voire de franche provocation, dans l'annonce d'un possible *Eloge de l'optimisme* ? Confirmons dès à présent cette intention malicieuse, impertinente et politiquement incorrecte. Nous plaiderons donc coupable en affirmant que si l'homme a des droits, il a aussi des devoirs et que le premier d'entre eux est le devoir d'optimisme, clé de tous les autres ! Mais nous n'en sommes pas encore là.

Car autant l'admettre d'emblée, l'optimisme n'est pas vraiment à l'ordre du jour. D'ailleurs, l'a-t-il jamais été ? Qu'ils dissertent du climat, de la situation économique et financière nationale ou mondiale, de la déliquescence de l'éducation, de la culture et de l'environnement, des tensions géopolitiques ou des risques sanitaires divers auxquels nous expose la modernité, la majorité des experts compétents diffusent globalement de forts arômes de pessimisme, voire de pessimisme donneur de leçons.

Bref, nous déclare-t-on en substance, le monde va globalement assez mal, cela ne s'arrangera pas dans l'avenir et d'ailleurs, vous l'avez bien cherché !

Haro sur les optimistes ! Qu'un grand quotidien se pique de ne plus diffuser que des bonnes nouvelles, et son nombre de pages diminuera sans doute à mesure que fondra son lectorat. Quant au sympathique politicien excessivement optimiste, en particulier sur les sujets graves, la supposée immaturité d'une telle attitude risque rapidement de lui faire interrompre une carrière prometteuse, faute de crédibilité et de suffrages.

Car tout est là. Non seulement le pessimisme fait davantage vendre que l'optimisme, mais en outre il fait plus sérieux, plus solide, bref plus réaliste !

Le citoyen que nous sommes, qu'il soit père ou mère de famille, qu'il soit salarié ou retraité, étudiant ou enseignant, peine ainsi à trouver au fil des séquences de son journal télévisé favori quelques miettes de réconfort et de confiance en l'avenir. Et pour peu que -pris d'une sorte d'addiction morose- il se mette à fréquenter assidument les forums et autres blogs d'humeur qui fleurissent sur le Net, le désespoir ne tarde pas à s'infiltrer, incrustant au cœur des esprits les moins chagrins, son visage mélancolique et résigné.

Il demeure bien sûr nombre de quêteurs, porteurs et autre diffuseurs d'espoir et de confiance. Ils constituent la communauté invisible de toutes celles et ceux qui, de par le monde, pensent que l'avenir est toujours ouvert, que la partie est loin d'être perdue, que les forces vives de l'intelligence frappent à nos portes, que la créativité et la passion peuvent tout, que d'autres solutions ne demandent qu'à être inventées et que tant d'autres chemins n'attendent qu'à être explorés.

Qu'à cela ne tienne. Rendons un instant la parole aux experts et ils ne tarderont pas à qualifier ces « incorrigibles optimistes » de rêveurs, de poètes, voire de naïfs ou d'utopistes. Et c'est sous couvert de réalisme et de lucidité qu'ils les renverront séance tenante à l'analyse froide de la seule vérité qui compte, celle de la rationalité des chiffres et du bon sens, celle de l'étroite sagesse des possibles raisonnables dont il s'agit d'assurer la victoire face à l'immense éventail des impossibles radieux !

Dès lors, pourquoi un *Eloge de l'optimisme* ? Pourquoi tenter de défendre, de promouvoir, de diffuser largement cette forme de pensée, sympathique certes, mais tellement inadaptée-aux dires de certains- aux réalités d'un monde si cruel et désespérant ?

La réponse est simple : nous sommes de plus en plus nombreux à penser qu'il existe une authentique *voie optimiste* et qu'à l'heure de la montée des incertitudes dans tous les domaines, cette voie seule est à même de faire bouger dans le bon sens la société de ceux qui y vivent. Que ce soit dans le monde de l'éducation ou de la santé, dans la famille ou au bureau, chez les travailleurs sociaux ou les hommes d'affaires, dans les médias ou au coin de la rue, l'optimisme repart en campagne. Mais une chose a changé. Les optimistes ne sont plus seuls ! Dans le monde entier, un nombre croissant de chercheurs, journalistes, intellectuels, philosophes, écrivains, enseignants, psychologues etc. entreprennent désormais de mieux comprendre, de défendre et de diffuser largement la pratique de cette fabuleuse dimension de la nature humaine.

Les optimistes avaient déjà leurs grands auteurs, ils ont désormais leurs grands chercheurs, leurs chaires universitaires, et même une organisation internationale, Optimistes sans frontières, et un pays d'accueil virtuel, l'Optimistan ! Celles et ceux qui dans leur vie personnelle et professionnelle font le choix de l'optimisme sont bien sûr convaincus que cette voie est à la fois nécessaire et salubre. Mais n'est-ce pas un chemin bien abrupt en ces temps si difficiles parfois si désespérants ? Non, car l'optimisme peut être une aventure réellement positive et agréable, souriante et énergique, et somme toute relativement aisée d'accès, pour peu que l'on accepte de regarder différemment le monde qui nous entoure et par conséquent, de conduire différemment notre propre existence.

Car, et c'est bien là l'autre bonne nouvelle annoncée par les spécialistes de la question, l'optimisme n'est plus uniquement considéré comme un trait inné de personnalité, même si nous n'avons pas tous les mêmes prédispositions en la matière. Mais ce que les maîtres ès optimisme nous apprennent, c'est que la partie n'est pas jouée d'avance, même pour les plus pessimistes (pardon, les plus réalistes) d'entre nous. Oui, l'optimisme se travaille, se développe et s'entretient comme on entretient son corps et son esprit.

Au cœur de cet *Eloge de l'optimisme* réside une conviction simple, à la fois humaniste et citoyenne. Il n'y a pas, il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais d'alternative durable à l'optimisme surtout quand les brouillards descendent, que résonnent encore dans le lointain les orages qui s'éloignent et que grondent ceux qui s'approchent. Seul l'optimisme peut faire bouger le monde et évoluer positivement ceux qui y viennent.

Il est vrai que le pessimisme peut avoir raison. Il a même souvent raison techniquement parlant. Mais c'est aussi parce que l'optimiste ne le croit pas, qu'il entreprend des folies déraisonnables, qu'il sort du cadre, qu'il prend des risques, qu'il s'aventure, qu'il parie, bref qu'il profite davantage du voyage de la vie, quelles que soient les surprises -bonnes ou mauvaises- que celle-ci lui réserve.

Voilà ce qui fait désormais de l'optimisme militant un authentique combat philosophique et social, et donc une quête majeure car chargée de sens pour les générations présentes et à venir.

L'optimisme est nécessaire car il se nourrit d'enthousiasme autant qu'il en diffuse autour de lui. Il peut arriver que cet enthousiasme se révèle excessif, illusoire ou risqué. Mais qu'importe. Comme nous le rappelle la célèbre formule du philosophe Hegel, « Rien de grand ne s'est accompli dans le monde sans passion ». Et quand bien même l'enthousiasme ferait trébucher l'optimisme, c'est quand même lui qui lui donne l'envie de se relever puis de poursuivre, le sourire aux lèvres, l'aventure promise à chacun au fil de cette merveilleuse route que l'on appelle la vie.

Mais connaissons-nous vraiment l'optimisme ? C'est à cette définition et aux mises en perspectives qu'elle exige que nous nous attacherons. Nous entreprendrons une excursion dans quelques domaines où l'optimisme fait aujourd'hui la différence, notamment pourquoi et comment l'attitude optimiste nous maintient plus longtemps en meilleure forme physique et mentale, nous conduit à créer des relations sociales plus agréables, nous rend plus attractif dans le monde professionnel et, ce qui ne gâte rien, fait de nous des hommes ou de femmes plus chanceux que les autres. Nous apprendrons comment développer cette dimension optimiste dans nos propres vies, éduquer notre regard à voir le monde de façon optimiste, prendre des décisions porteuses de possibilités nouvelles et, surtout, nous permettre de contribuer à la création d'une authentique « société optimiste » pour le plus grand bénéfice de tous.

L'optimiste et les lendemains qui chantent

On constate en premier lieu que l'optimiste, sans toujours voir tout en rose -comme on le lui reproche parfois- n'en perçoit pas moins l'avenir à travers un filtre particulier. Les premiers chercheurs dans le domaine ont étudié de près ce trait de personnalité, cette façon remarquable de se projeter dans le temps et d'optimiser son futur en l'imaginant de façon globalement positive. Pour le psychiatre Christophe André être optimiste conduit toujours à « supposer, face à l'incertain, qu'il existe une issue favorable et se donner le droit d'agir pour la faciliter » Cette définition rejoint d'ailleurs celle d'une autre grande spécialiste Sonja Lyubomirski, qui voit dans l'optimisme « l'anticipation globale d'un avenir positif, assortie de la certitude qu'on pourra remplir ses objectifs » Aux dires de ces experts, l'optimisme présente donc -psychologiquement parlant- deux facettes :

- Une facette cognitive et intellectuelle : l'optimiste est un individu qui envisage aisément une issue favorable aux situations qu'il rencontre ;

- Une facette émotionnelle et affective : l'optimiste est aussi quelqu'un qui éprouve un sentiment de confiance heureuse dans l'évolution ou le dénouement d'une situation.

Les optimistes, une ressource pour l'entreprise

L'optimisme représente souvent un critère essentiel d'appréciation, en particulier lorsqu'on recrute un nouveau collaborateur. Certes, les pessimistes ont toujours leur chance, toute entreprise comprenant aussi des postes exigeant de ceux qui les occupent un sens aigu des réalités, voire un haut niveau de prudence et d'évitement du risque. On pense en particulier à des métiers concernant la sécurité des personnes, l'estimation de coûts, la gestion de fonds importants, le contrôle sous toutes ses formes le respect des procédures et des normes techniques, etc. Dans ce genre de fonction, un pessimisme modéré peut même représenter une réelle ressource et un optimisme excessif, un danger patent.

En revanche, dès lors que la mission qui lui est confiée exige persévérance, prise d'initiatives, esprit d'innovation et créativité, l'optimisme réapparaît dans les critères de choix d'un collaborateur. Il en sera de même si le travail demandé tend à créer des tensions psychologiques (que ce soit avec soi-même ou avec les autres), c'est-à-dire s'il comprend une dose non négligeable d'échecs ou de vexations. Confrontés à des situations de ce genre, les plus optimistes sauront mieux que d'autres, trouver le mode d'explication positif qui leur permettra de résister aux frustrations et de trouver des voies permettant de rebondir.

Dans le cadre de sa politique de recrutement, l'entreprise peut donc utiliser l'optimisme comme un critère pertinent de sélection de nouveaux collaborateurs.

.../... L'attitude positive au travail, comment ça marche ?

Mais si l'optimisme -en tant qu'état d'esprit collectif- peut être considéré comme une ressource pour l'entreprise, cette ressource est-elle pour autant développable ? Oui, nous disent les spécialistes. Tel est d'ailleurs l'un des buts des politiques visant à développer une authentique « attitude positive au travail ».

C'est dans les périodes difficiles et conflictuelles que l'on prend plaisir à redécouvrir les vertus d'un climat de travail positif. Dans toute entreprise, c'est en effet le « climat » -c'est-à-dire l'atmosphère prédominante ressentie par les employés- qui crée le terrain culturel sur lequel vont prospérer négativité et tension ou au contraire attitude positive et énergie d'action.

Une attitude positive au travail « fabrique » de l'optimisme individuel et collectif car elle accroît naturellement le niveau d'engagement et d'implication investi par les employés dans leur tâche. Ce faisant, elle entraîne la motivation et la performance des équipes à travers une satisfaction accrue. Elle favorise de même l'apparition de comportements solidaires et crée enfin les conditions pour que prospère un esprit d'innovation et d'ouverture.

« Il n'y a pas d'amour, mais uniquement des preuves d'amour. » Cette phrase de Jean Cocteau s'applique parfaitement à l'attitude positive au travail qui n'existe, elle aussi, que par ses manifestations. Sur le terrain, dans la réalité de la vie des entreprises, elle se manifeste par un comportement collectif (employés, cadres, dirigeants) composé à la fois d'ouverture, de participation active et d'esprit constructif. Si l'attitude positive au travail se nourrit d'optimisme autant qu'elle l'entretient, c'est qu'elle finit par générer un climat mêlant naturellement :

- une grande clarté sur les buts poursuivis et les règles à suivre,
- un appui des acteurs entre eux, que ce soit dans l'action quotidienne ou en cas de problème,
- une atmosphère de défis à relever, nourrie par des marques de confiance réciproques des personnes entre elles.

Néanmoins, malgré tous ces avantages, la fin de la négativité au travail ne saurait être décrétée si facilement ! L'attitude négative au travail est en fait une sorte de cocktail « létal », car potentiellement tueur de motivation et d'enthousiasme. Ses ingrédients clés - souvent nourris par l'organisation elle-même- sont toujours les mêmes : pessimisme, défiance, jalousie, critique systématique et ruminant. Et leur mélange conduit assez rapidement à l'instauration d'un sentiment collectif d'impuissance et de découragement.

Car même fondée sur des faiblesses réelles du système, une attitude négative au travail nuit toujours profondément à ceux qui en sont porteurs ainsi qu'à celles et ceux qui les entourent. En effet, elle entretient un esprit délétère orienté sur la seule dénonciation des faiblesses, légitimée et nourrie par l'illusion utopique de la possibilité d'un monde parfait.

L'attitude positive au travail, en revanche, ne fait pas l'impasse sur les difficultés : mais elle les regarde différemment, de façon sereine et surtout constructive.

Elle est aussi un phénomène fonctionnant selon les lois de la gravitation -c'est-à-dire en cascade- du sommet de l'entreprise jusqu'aux niveaux d'exécution les plus modestes. Inutile donc d'espérer une attitude positive durable de la part de collaborateurs qui n'observent pas l'équivalent dans le comportement de leurs propres managers et dirigeants.

L'attitude positive au travail enfin est un phénomène diffus et contagieux qui infiltre l'ensemble des dimensions de la vie de l'entreprise. Qu'il s'agisse de la relation entre les collaborateurs d'une même organisation, des modes de fonctionnement hiérarchiques ou de la façon de traiter les clients et les fournisseurs, l'attitude positive ne saurait être cloisonnée. Elle est partie intégrante de la culture de l'entreprise et de ses modes de fonctionnement, ou n'est pas.

Afin de faire vivre l'attitude positive au travail, l'entreprise doit donc compter en priorité sur celles et ceux qui la dirigent et l'animent. Parmi eux une population occupe aujourd'hui une place éminemment stratégique : les *managers de proximité*.

.../...Un manager optimiste est celui dont on peut dire : « Il m'a donné envie d'essayer, il m'a autorisé à ne pas réussir tout de suite et m'a poussé à recommencer jusqu'à ce que je gagne la partie ! ».