Concours 2012

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Enoncé 1: ***(5 points)***

Soit $P(X) = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1) Déterminer le degré de P.

2) Montrer que P a au moins deux zéros réels entiers. En déduire leur ordre de multiplicité.

3) Démontrer que $P(X)$ est divisible par $X - j$. $\left(j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

5) Décomposer $R(X) = \frac{7}{P(X)}$ en éléments simples de $\mathbb{R}[X]$.

Enoncé 2: ***(5 points)***

A) Discuter et résoudre le système :

$$\begin{cases} 2ax + (2a+1)y + (2a^2 + a)z = -3a^2 \\ x + (1-a)y + (2-2a)z = 0 \\ x + ay + 2az = 1 \end{cases}$$

Où a étant un paramètre réel.

B) Calculer les intégrales suivantes :

1.

$$I_1 = 18\int_0^{\ln 2} e^{3x}\ln\left(1+e^x\right)dx$$

2.

$$I_2 = \int_0^2 \frac{5t^2}{(1+t)\left(4+t^2\right)}dt$$

Enoncé 3: ***(3 points)***

1) Démontrer les formules :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad n \in N_0$$

2) Déduire de 1) la valeur de la somme :

$$mn + (m-1)(n-1) + (m-2)(n-2) + \ldots\ldots 1.(n-m+1) \quad m, n \in N_0 \ (m < n)$$

3) Calculer pour $m = 7$ et $n = 10$