ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION

Concours d'entrée 2011-2012

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

Enoncé 1: *(4 points)*

Etude du sous ensemble C de IR^2 défini par :

$$C = \{(x,y) \in IR^2, \quad y = x\,exp\left(\frac{16}{3+2\,xy}\right)\},$$

On admet que C est une courbe et qu'il existe une fonction φ telle que C ait une équation $y = \varphi(x)$ (y est fonction implicite de x),

a) Montrer qu'on peut se limiter aux couples $(x,y) \in IR^+ \times IR^+$.
b) Montrer que si $x \neq 0$, $\frac{y}{x}$ *est borné*.
c) En déduire $\lim_{x\to 0} \varphi(x)$, et faire une étude locale de la fonction φ *en* 0.
d) Déterminer $\lim_{x\to +\infty} \varphi(x)$, et montrer que C admet une asymptote oblique d'équation $y = x$

Enoncé 2: *(4 points)*

Pour tout entier n non nul, on pose $I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} cos^{2n} x\, dx$.

1. a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n *et* I_{n-1} ; J_n *et* J_{n-1}.
   b) En déduire l'expression de :

$$I_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}, \forall n \geq 1 \quad \text{et} \quad J_n = \frac{\pi\,(2n-1)!}{2^{2n}\; n!\;(n-1)!}, \forall n \geq 1$$

2. Montrer que pour tout *entier n non nul*,
$$J_{n+1} \leq I_n \leq J_n.$$
3. En déduire un équivalent au voisinage de l'infini de I_n.
4. Soit $a > 0$. Pour tout *entier n non nul*, on pose $K_n(a) = \int_0^a x^n \left(2 - \frac{x}{a}\right)^n dx$.
   Déterminer $K_n(a)$.

Enoncé 3: *(5 points)*

A) Calculer $I = \int_0^1 \frac{(x+3)}{(x+1)^7(x^2+2x+2)}\, dx$.

B) On suppose que le trinôme $x^2 + px + q$ a deux racines réelles α *et* β. Soit I un intervalle ne contenant pas α *et* β.
Comment doit-on choisir les nombres réels a, b, p, q pour qu le[illegible]mitives sur I de $g(x) = \frac{x^2+ax+b}{(x^2+px+q)^2}$ soit des fractions rationnelles?

C) On donne la matrice A dans laquelle x, y et z sont des paramètres réels

$$A = \begin{bmatrix} z-y & -\frac{x+y}{2} \\ 0 & z-2x \end{bmatrix}$$

On demande de déterminer x, y et z de sorte que :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

D) Discuter et résoudre le système : $\begin{cases} x+y+z = 2a+1 \\ ax - ay - 2z = 0 \\ ax + 2ay + a^2 z = 4a^2 - 1 \end{cases}$

où a est un paramètre réel.

4 m 3 m