EAMAC – 2014 - SUJET M-I-5

Exercice 1 (6 points)

Soient , B deux sous-ensembles de E , f une application définie par

$$f : P(E) \to P(A) \times P(B)$$
$$f(X) = (X \cap A, X \cap B)$$

1. Démontrer que f est injective ssi $A \cup B = E$

2. Démontrer que f est surjective ssi $A \cap B = \emptyset$

3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective et déterminer f^{-1}

Exercice 2 (6 points)

Soit A un anneau commutatif. On appelle radical de l'idéal propre I l'ensemble
$\overline{} = \{x \quad A / \ n \quad \mathrm{N}, x^n \quad \mathrm{I}\}$.

1. Montrer que $\overline{}$ est un idéal

2. Que se passe-t-il si $I = 0$

3. Montrer que $\overline{} = \overline{} \cap \overline{} = \overline{}$

4. Quel est le radical d'un idéal premier $\mathcal{J}$?

5. Déterminer complètement le radical d'un idéal $\mathcal{J} = \overline{}$ de Z où $m = p_i^{\alpha 1} \ldots p_r^{\alpha r}$

6. Déterminer $I + J$, $I \cap J$, $\overline{}$ pour :

   (a) $I = 8\mathrm{Z}$, $J = 12\mathrm{Z}$ dans Z

   (b) $I = (X - 1)$, $J = (X)$ dans $\mathrm{Z}[X]$

Exercice 3 (4 points)

Soit (f_n) une suite de fonctions définie par

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur R
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur [α , +∞[
3. la convergence uniforme sur [0, +∞[

Exercice 4 (4 points)

Etudier la série de terme général u_n lorsque :

1.
2. $=$
3. $=$