

Exercice 1 : 5 points

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.

- 1) Donner la définition de dérivabilité en x_0 pour la fonction f .
- 2) On suppose que f est 3 fois dérivable sur \mathbb{R} . Ecrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 près de x_0

Exercice 2 : 3 points

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \neq 0$.

Déterminer l'ensemble des points où elle est continue.

Exercice 3 : 5 points

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k . Montrer que

$$I_n = I_n - A + A - A^2 + A^2 - \dots + A^{k-1} - A^{k-1} + A^{k-1}$$

2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est telle que $A^3 = 0$. Calculer l'inverse

de la matrice $B = I_3 - A$.

Exercice 4 : 7 points

Soit A et B des parties d'un ensemble E . Montrer que :

- 1 - $(A \Delta B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B = \emptyset)$.
- 2 - $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
- 3 - $A \Delta B = B \Delta A$.
- 4 - $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
- 5 - $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
- 6 - $A \Delta C = B \Delta C \Leftrightarrow A = B$