UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2020 G 18 BIS A 01
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 Coef. 8
Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : 4 points

1) On admet que tout entier naturel n, strictement supérieur à 1, est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 524 et de 629. **0,5 pt**

2) Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère l'ensemble Γ des points de coordonnées (x, y, z) tels que $z = xy$ et l'ensemble C des points de coordonnées (x, y, z) tels que $x^2 + z^2 = 1$.

a) Démontrer que les coordonnées (x, y, z) des points d'intersection de Γ et C vérifient la relation $x^2(1 + y^2) = 1$. **0,5 pt**

b) En déduire que Γ et C ont deux points communs dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0,5 pt**

3) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z = n^4 + 4$.

a) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_1 dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0,5 pt**

Dans la suite de l'exercice, on suppose $n > 1$.

b) Vérifier que $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) = n^4 + 4$. **0,5 pt**

c) Montrer alors que $n^4 + 4$ n'est pas premier. **0,5 pt**

d) En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et P_n dont les coordonnées sont des entiers relatifs est supérieur ou égal à 8. **0,5 pt**

e) Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et P_5 dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0,5 pt**

EXERCICE 2 : 5 points

Dans un tétraèdre, la droite passant par un sommet et par le centre de gravité de la face opposée à ce sommet est appelée médiane et cette face est appelée face associée à cette médiane.

Soient $ABCD$ un tétraèdre régulier et A' le centre de gravité du triangle BCD. Ainsi la droite (AA') est une médiane du tétraèdre $ABCD$ de face associée (BCD).

1) On veut démontrer la propriété suivante $(\mathbf{P})$: dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale au plan de sa face associée.

a) Montrer que $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ et $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **1 pt**

b) Montrer alors que dans un tétraèdre régulier, chaque médiane est orthogonale au plan de sa face associée. **1 pt**

2) Soit G l'isobarycentre de ABCD.

Montrer que G appartient à chacune des médianes de ABCD. **1 pt**

3) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $P(1,2,3)$, $Q(4,2,-1)$ et $R(-2,3,0)$.

a) Montrer que le tétraèdre $OPQR$ n'est pas régulier. **0,5 pt**

b) Déterminer les coordonnées de P', centre de gravité du triangle OQR. **0,5 pt**

c) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (OQR) est : $3x + 2y + 16z = 0$. **0,5 pt**

d) La propriété $(\mathbf{P})$ est – elle vraie dans un tétraèdre quelconque ? **0,5 pt**

Problème : 11 points

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x)=\dfrac{1}{x(1+x)^n}$ et C_n sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

Partie A

1) Etudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les variations de f_n puis dresser son tableau de variation. **1 pt**

2) Montrer que f_n admet une bijection réciproque notée f_n^{-1} dont on précisera le domaine de définition J. **0,75 pt**

3) Etudier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la position de C_{n+1} par rapport à C_n. **0,5 pt**

4) Tracer les courbes C_0, C_1 et C_2. **1,25 pt**

Partie B

On pose pout tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_1^2 f_n(x)dx$.

1) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x(1+x)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1+x}$. **0,5 pt**

b) Calculer I_0 et I_1. **0,5 pt**

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$. **1 pt**

3) Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm² du domaine plan délimité par C_1, C_2 et les droites d'équations $x = 1$ et $= 2$. Calculer $\mathcal{A}$. **0,5 pt**

4) a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $I_n = I_1 + S_n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^k - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]$. **0,5 pt**

b) Montrer que $\forall n \geq 1$; $0 \leq I_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **0,5 pt**

c) En déduire la limite de I_n puis celle de S_n. **1 pt**

Partie C

On pose, pour tout entier naturel n, $\Gamma_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{f_n(x)}{x}$. **0,75 pt**

2) En déduire que pour tout entier naturel n, $\Gamma_n = \ln\left(2\sqrt{e}\right) - \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx$. **0,75 pt**

3) Justifier que pour tout entier naturel n, $0 \leq \int_1^2 \frac{f_n(x)}{x}dx \leq I_n$. **1 pt**

4) Déterminer alors la limite de Γ_n. **0,5 pt**