UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01-19 G 18 Bis A-20
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*).

Pour tout couple d'entiers relatifs non nuls (a, b), on note pgcd (a, b) le plus grand diviseur commun de a et b.

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Montrer que si (x, y) est un couple d'entiers relatifs, alors l'entier $35x - 30y$ est divisible par 5. 0.5 **pt**

b. Existe-il un point de la droite d'équation $y = \dfrac{7}{6}x - \dfrac{2}{5}$ dont les coordonnées sont deux entiers relatifs ? Justifier. 0.5 **pt**

Etant donnés deux entiers relatifs p et q premiers entre eux, on considère la droite $(D_{p,q})$ d'équation $y = \dfrac{7}{6}x - \dfrac{p}{q}$.

On dit que $(D_{p,q})$ est une droite rationnelle.

Le but de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que la droite rationnelle $(D_{p,q})$ comporte au moins un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. On suppose ici, que la droite $(D_{p,q})$ comporte un point de coordonnées (x_0, y_0) où x_0 et y_0 sont des entiers relatifs.

a. Démontrer que q divise le produit $6p$. 0.5 **pt**

b. En déduire que q divise 6. 0.5 **pt**

3. Réciproquement, on suppose que q divise 6 et on souhaite trouver un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{7}{6}x_0 - \dfrac{p}{q}$.

a. On pose $6 = qr$ où r est un entier relatif. Démontrer qu'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que $7u - qrv = 1$. 0.5 **pt**

b. En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que $y_0 = \dfrac{7}{6}x_0 - \dfrac{p}{q}$. 0.5 **pt**

4. a. Soit (Δ) la droite d'équation $y = \dfrac{7}{6}x - \dfrac{8}{3}$. Cette droite possède t-elle un point dont les coordonnées sont des entiers relatifs ? Justifier. 0.5 **pt**

b. Déterminer tous les points de (Δ) à coordonnées entières. 0.5 **pt**

Exercice 2 (6 *points*).

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(0,0,3\sqrt{2}), \quad B(4,0,-\sqrt{2}), \quad C(-2,-2\sqrt{3},-\sqrt{2}) \text{ et } D(-2,2\sqrt{3},-\sqrt{2}).$$

1. a. Montrer que ABC est un triangle équilatérale. 0.5 **pt**

b. Montrer que les points A, B, C et D sont non coplanaires puis démontrer que $ABCD$ est un tétraèdre régulier. $0.5 + 0.75$ **pt**

c. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. 0.5 **pt**

2. On note P, Q, R et S les milieux respectifs des arêtes $[AC], [AD], [BD]$ et $[BC]$.

a. Déterminer la nature exacte du quadrilatère $PQRS$. 0.75 **pt**

b. Calculer l'aire du quadrilatère $PQRS$. 0.25 **pt**

3. Le tétraèdre qui est parfaitement équilibré, a une face numérotée 0, une face numérotée 1 et deux faces numérotées 2. On le lance deux fois de suite et on lit à chaque fois les chiffres apparus sur les trois faces visibles.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le produit des six chiffres apparus est non nul. » 0.5 **pt**

F : « la somme des six chiffres apparus est supérieure ou égale à 8. » 0.75 **pt**

4. On note X la variable aléatoire qui à chaque série de deux lancers associe la somme des chiffres apparus sur les faces visibles.

a. Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X. $0.5 + 0.25$ **pt**

b. On effectue n fois de suite de manière indépendante l'expérience qui consiste à lancer deux fois de suite le tétraèdre.

Calculer la probabilité p_n que l'événement F soit réalisé au moins une fois. 0.5 **pt**

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. 0.25 **pt**

PROBLEME (10 *points*).

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique $2\,cm$.

Partie A

1. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat. 0.5 **pt**

b. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. 0.75 **pt**

c. Vérifier que pour tout réel $x > \dfrac{1}{2}$, $f'(x) < 1$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $]1/2, +\infty[$ une unique solution α et que $0,7 < \alpha < 0,8$. $0.5 + 2 \times 0.25$ **pt**

d. Tracer $\mathcal{C}_f$. 0.5 **pt**

2. a. Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un ensemble J que l'on précisera. 0.5 **pt**

b. Démontrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans J une solution unique égale à α. Tracer la courbe de g. 0.75 **pt**

c. Expliciter $g(x), x \in J$. 0.25 **pt**

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\forall x \in J, \quad F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n \, dt, \quad \text{et} \quad I_n = F_n(\alpha).$$

1. Montrer que pour tout $x \in J, F_2(x) = g(x) - x^2$. Exprimer alors I_2 en fonction de α. $0.5 + 0.25$ **pt**

2. a. Montrer que F_n est dérivable dans J et que pour tout x appartenant à J,

$$F_n'(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}.$$

$0.25 + 0.5$ **pt**

b. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x distinct de 1 et de -1 on ait :

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1-x} + \frac{c}{1+x}.$$

0.25 **pt**

c. Pour $x \in J$, expliciter $F_1(x)$. Exprimer alors I_1 en fonction de α. $0.5 + 0.25$ **pt**

d. Déterminer en fonction de α l'aire du domaine plan délimité par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$. 0.25 **pt**

Partie C

1. a. Montrer que $F_{n+2}(x) - F_n(x) = -\dfrac{2}{n+2}x^{n+2}$. 0.5 **pt**

b. En déduire que $I_{n+2} - I_n = -\dfrac{2}{n+2}\alpha^{n+2}$. 0.25 **pt**

2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, I_{2n} = \alpha - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^{2k}}{k}$$

$$\text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, I_{2n+1} = \ln\frac{1+\alpha}{1-\alpha} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$$

2×0.5 **pt**

3. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq I_n \leq \alpha^{n+1}$. 0.5 **pt**

b. En déduire $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n$, $\quad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha^{2k}}{k}$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^{2k+1}}{2k+1}$. 3×0.25 **pt**