UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

01-19 G 26 A-20
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5–Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (4,5 pts)

Dans une classe de première S_2, sur 45 élèves 30 ont eu la moyenne au premier devoir de mathématiques. On considère que dans cette classe si un élève a la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{2}$ et s'il a raté la moyenne à un devoir donné la probabilité qu'il ait la moyenne au devoir suivant est $\frac{1}{3}$.

Soit E_n l'événement « l'élève a eu la moyenne au n-$ième$ devoir », $\overline{E_n}$ l'événement « l'élève n'a pas eu la moyenne au n-$ième$ devoir » et p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1) Déterminer p_1. **(0,5 pt)**
2) a) Déterminer $p(E_2 / E_1)$ *et* $p(E_2 / \overline{E_1})$. **(0,5 pt)**
   b) En déduire p_2. **(0,5 pt)**
3) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $p_{n+1} = \frac{1}{6}\, p_n + \frac{1}{3}$. **(0,75 pt)**
4) Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n, par : $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.
   a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. **(01 pt)**
   b) Exprimer u_n en fonction de n puis p_n en fonction de n. **(01 pt)**
   c) Calculer la limite de p_n quand n tend vers l'infini. **(0,25 pt)**

EXERCICE 2 (5,5 pts)

PARTIE A

Pour tout complexe z on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1) Déterminer le polynôme Q tel que, quel que soit $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$. **(0,5pt)**
2) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : f(z) = 0. **(0,5pt)**
3) Ecrire les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis les représenter dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}, \vec{v}$). **(0,5 pt + 0,5pt)**

PARTIE B

Considérons les points A, B, C et D du plan $\mathscr{P}$ tels que :

$$A\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad B\,(-1+i), \quad C\,(-1-i) \quad \text{et} \quad D\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

1) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? **(0,5pt)**

2) Soit r la rotation de centre le point Ω d'affixe 1 qui transforme A en D.
   Déterminer l'écriture complexe de r. **(0,5pt)**
3) Quelle est la nature du triangle ΩAD? **(0,5pt)**
4) Déterminer l'affixe du centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD. **(0,5pt)**
5) On pose $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$ où z_A est l'affixe du point A.
   Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle u_n est un réel. **(1pt)**
6) Donner la forme algébrique de u_{2019}. **(0,5pt)**

PROBLEME (10 pts)

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x-4)e^{\frac{x}{2}}$ ·
On note $\boldsymbol{C_f}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On choisit $2cm$ pour unité graphique.

PARTIE A :

Soit g la fonction numérique définie pour tout x réel par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.
1) Calculer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$. **(0,75pt)**
2) Etudier le sens de variations de g puis dresser le tableau de variations de g. **(1pt)**
3) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule puis prouver que $0{,}70 \leq \alpha \leq 0{,}71$. **(0,75pt)**
   Etudier le signe de $g(x)$. **(0,5pt)**

PARTIE B :

1) a) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de $g(x)$. **(0,5pt)**
   b) En déduire le sens de variations de f. **(0,5pt)**
   c) Démontrer que : $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$, où α est le nombre défini en 3) **Partie A**. **(0,5pt)**
2) Donner un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 0,1. **(0,5pt)**
3) a) Déterminer la limite de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$. **(0,75pt)**
   b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$. **(0,25pt)**
4) Démontrer que $\boldsymbol{C_f}$ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote (D) dont on donnera une équation. **(0,5pt)**
5) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5pt)**
6) Tracer sur le même graphique $\boldsymbol{C_f}$ et (D). **(1,5pt)**
7) A l'aide d'une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel x l'intégrale

$I(x) = \int_0^x (2t-4)e^{\frac{t}{2}}\,dt$ · **(0,75pt)**

8) Soit λ un réel négatif. Calculer en cm^2 l'aire $\mathscr{A}$ du domaine constitué des points de coordonnées (x, y) satisfaisant à : $\lambda \leq x \leq 0$ et $f(x) \leq y \leq 2 - x$. **(0,25pt)**

Interpréter graphiquement la limite de l'aire $\mathscr{A}$ quand λ tend vers $-\infty$. **(0,5pt)**