Durée : 4 heures

OFFICE DU BACCALAUREAT Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Téléfax (221) 824 65 81 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n°5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 : (03,5 points). Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$$

1. Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (On notera que $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

2. **a.** En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b. En utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|; |f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.

Dans cette question on prend $\alpha = -\dfrac{a+b}{r}$ et $\beta = \dfrac{ab}{r^2}$.

a. Montrer que les affixes respectives de B et C sont rj et rj^2.

b. Montrer que $BO.BI.BJ = r^3|f(j)|$. Calculer de la même manière $CO.CI.CJ$ et $AO.AI.AJ$

c. Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO.SI.SJ \geq r^3$.

EXERCICE 2 : (04 points). Le plan (P) étant orienté ; on considère un triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$ ait pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$. On note O l'intersection des bissectrices intérieures de ABC. Soit s_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme B en O et s_2 la similitude plane directe de centre C qui transforme O en B. A tout point M du plan distinct de A et de B ; on associe le point $N = s_1(M)$ et le point $P = s_2^{-1}(M)$

1. **a.** Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN})$.

b. On désigne par s' la similitude plane directe de centre A qui transforme B en M.

Montrer que $s' \circ s_1 = s_1 \circ s'$; en déduire l'image de O par s'. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})$.

c. Proposer une construction géométrique de N, lorsque le point M est donné.

2. **a.** Quelle est la nature de $r = s_1 \circ s_2$? préciser ses éléments géométriques caractéristiques.

b. Déterminer r(P) et en déduire une construction géométrique de P à partir de N.

c. Lorsque $M = O$, montrer que le point N appartient à la demi-droite $[AC)$ et le point P à la demi-droite $[CA)$

3. Faire une figure comportant les points A, B, C, O, P et N avec $M = O$.

EXERCICE 3 : (3,5 points). On conssidère dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, les trois points A, B et C de coordonnées respectives $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$, puis à tout réel $t \in [0,1]$ on associe le point $M(t)$ barycentre du système $\left\{(B,(1-t)^2),(A,2t(1-t)),(C,t^2)\right\}$. On note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $M(t)$ et (Γ) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $[0,1]$.

1. **a.** Exprimer en fonction de t les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de $M(t)$.

b. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y et tracer la courbe (Γ) ainsi que ses tangentes aux points B, C et $M\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2. Montrer que les tangentes à (Γ) en B et C se coupent en A.

3. Touver une relation entre $x(t)$ et $y(t)$ indépendante de t. On calculera y en fonction de x et on posera $y = f(x)$. La fonction f est-elle dérivable à gauche au point 1 ?

PROBLEME : (9 points)

PARTIE A :

Soit f une fonction définie sur $[1;+\infty[$, ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} f'(n)$.

1. Démontrer la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1) \tag{0.1}$$

a. En appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi.

b. En utilisant la valeur moyenne de f' sur $[n;n+1]$. [On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction continue g sur un intervalle $[a;b]$ est : $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b g(x)dx$].

2. En utilisant la relation (0.1), de la question **1.** démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1) \tag{0.2}$$

3. Dans cette question on prend $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

a. Vérifier que la suite (u_p) est monotone.

b. En utilisant la relation (0.2), de la question **2.** montrer que la suite (u_p) est bornée.

c. En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^3}$ est convergente et que sa limite appartient à l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

4. Dans cette question on prend $f(x) = -\ln x$.

a. En utilisant la relation (0.2), montrer que $u_p \leq -\dfrac{1}{p} - \ln p$.

b. Montrer que $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}\sum\limits_{n=1}^{p}\frac{1}{n}=+\infty$.

PARTIE B :

1. Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$.

a. En effectuant le changement de variable $u=t-n\pi$ et en ramarquant que la fonction $u\mapsto|\sin u|$ est périodique de période π.

b. En utilisant le résultat admis suivant :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall t\in[n\pi,(n+1)\pi],|\sin t|=(-1)^n\sin t.$$

2. Pour tout réel $a>0$, on considère la fonction h_a définie sur $I=[0;+\infty[$ par :

$$h_a(t)=\left|\frac{\sin at}{t}\right|,\ \text{si } t\in]0;+\infty[,\ \text{et } h_a(0)=a.$$

a. Montrer que les fonctions h_a sont continues sur I.

b. Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt\ \leq\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}h_1(t)dt\ \leq\ \frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|dt$$

et

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin t|dt\ \leq\ \int_0^{\pi}h_1(t)dt$$

c. En déduire que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*:\quad \frac{2}{(n+1)\pi}\ \leq\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}h_1(t)dt\ \leq\ \frac{2}{n\pi}$$

(0.3)

et

$$\frac{2}{\pi}\ \leq\ \int_0^{\pi}h_1(t)dt$$

3. On veut utiliser les résultats précédents pour calculer $\lim\limits_{a\mapsto+\infty}\int_0^{\pi}h_a(t)dt$.

a. En utilisant la relation (0.3) comparer $\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{p}\frac{1}{n}$ et $\int_0^{p\pi}h_1(t)dt$.

b. Déduire de la question 4)b) partie A $\lim\limits_{p\mapsto+\infty}\int_0^{p\pi}h_1(t)dt$

c. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\int_0^{x}h_1(t)dt$ [On pourra introduire l'entier $p=E\left(\frac{x}{\pi}\right)$; où E désigne la fonction partie entière.]

4. Montrer que

$$\forall a\in\mathbb{R}_+^*:\ \int_0^{\pi}h_a(t)dt=\int_0^{a\pi}h_1(t)dt.$$

En déduire $\lim\limits_{a\mapsto+\infty}\int_0^{\pi}h_a(t)dt$

B A R E M E :

Ex 1 : 03,5 pts						Ex 2 : 04 pts							Ex 3 : 03,5 pts			
1	2		3			1			2			3	1		2	3
	a	b	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	a	b		
0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,75	0,5	0,75	0,5	0,5	0,5	1	1,5	0,5	0,5

Problème Partie A : 05 pts								Problème Partie B : 04 pts								
1		2	3			4		1		2			3			4
a	b		a	b	c	a	b	a	b	a	b	c	a	b	c	
0,5	0,5	1	0,5	0,5	1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,25	0,5	0,5	0,5