UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

07 G 26 A 01

Durée : 04 heures

Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1^er^ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (04 points)

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 4i)z + 1 - 2i = 0.$$

1. **a)** Déterminer la solution réelle de cette équation. **(0,5 pt)**

b) Montrer que i est une solution de cette équation. **(0,5 pt)**

c) Déterminer la troisième solution de cette équation. **(0,5 pt)**

2. Soient les points A, B et C d'affixes respectives 1, i et $2 + i$.

a) Déterminer le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. **(01 pt)**

b) En déduire la nature du triangle ABC. **(0,5 pt)**

c) Déterminer l'affixe du point D image de A par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. **(0,5 pt)**

d) Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle de centre I (1+i) et de rayon r à déterminer. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (04 points)

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On note p_i la probabilité d'apparition de la face numérotée i. Les p_i vérifient :

$p_1 = p_2$; $p_3 = p_4 = 2\,p_1$; $p_5 = p_6 = 3\,p_1$;

a) Montrer que $p_1 = \dfrac{1}{12}$. **(01 pt)**

b) Montrer que la probabilité de l'événement A : « obtenir 3 ou 6 » est égale à $\dfrac{5}{12}$. **(0,5 pt)**

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci- dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.

Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5m de la cible et lance la fléchette sur la cible ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\dfrac{3}{5}$.

Si l'événement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m, la cible est atteinte avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{5}$.

On note C l'événement : « la cible est atteinte ».

a) Déterminer p (C/A) et p (C/$\overline{A}$). **(0,5+0,5 pt)**

En déduire que $p(C) = \dfrac{29}{60}$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer p (A/C). **(0,5 pt)**

3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies.
Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 4 fois. **(0,5 pt)**

Problème : (12 points)

I. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1. Dresser le tableau de variation de g. **(01,5 pt)**

2. Montrer qu'il existe un unique réel α solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que α appartient à $]0{,}2\,;0{,}3[$. **(0,5 pt)**

3. En déduire le signe de g sur $]0\,;+\infty[$. **(0,5 pt)**

4. Etablir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$. **(0,5 pt)**

II. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0\,;+\infty[$. **(0,5+0,5 pt)**

2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat. **(0,5+0,5 pt)**

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$. **(0,5 pt)**

4. Montrer que, quel que soit x élément de $]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$. **(01 pt)**

En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$. **(0,5 pt)**

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$. **(0,5 pt)**

6. Dresser le tableau de variations de la fonction f. **(0,5 pt)**

7. Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité graphique : 5cm. Prendre $\alpha \approx 0{,}3$. **(1,5 pt)**

III. 1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I = \int_1^e x.\ln(x).\,dx$. **(01 pt)**

2. Montrer que pour tout x élément de $[1\,;e]$, $\dfrac{x\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \dfrac{x\ln x}{2}$. **(01 pt)**

En déduire que : $\dfrac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x).\,dx \leq \dfrac{e^2+1}{8}$. **(0,5 pt)**